MATHEMATICS

EIN EINHEITLICHES VERFAHREN ZUR DEFINITION VON ABSOLUT- UND BEDINGT-KONVERGENTEN INTEGRALEN. VII[bis]

VON

J. RIDDER

(Communicated at the meeting of June 25, 1966)

Durch Einführung einer Hilfsintegration ist es möglich die Aequivalenz von μ_Φ und m_Φ in R_1 aufs neue abzuleiten mittels eines Verfahrens, welches eine Übertragung in R_n mit $n \geqq 2$ ermöglicht.

§ 49. Definition. Eine in $i_0 \equiv i_0\ (a, b)$ für die Teilmengen $\in K_0$ definierte, endlichwertige Mengenfunktion Ψ ist in i_0 *semi-additiv nach oben* [*nach unten*], falls aus $i_j \subset i_0$ $(j=1, 2)$, $\bar{i}_1 \cdot \bar{i}_2 = \{P\}$ folgt

$$\Psi[\{i_1+\{P\}+i_2\}] \geqq [\leqq] \Psi[i_1]+\Psi[\{P\}]+\Psi[i_2].$$

Definition F[00]. In $i_0 \equiv i_0\ (a, b)$ ist eine für die Teilmengen $\in K_0$ nach oben semi-additive Mengenfunktion $\Psi_o{}^{00}$ *eine zu der in i_0 endlichwertigen Punktfunktion f adjungierte T^{00}-Majorante*, wenn: 1. für jeden Punkt $x \in i_0$ mit $T[\{x\}]=0$ auch $\Psi_o{}^{00}[\{x\}]=0$ ist; für jeden Punkt $x \in i_0$ mit $T[\{x\}] \neq 0$ gilt: $\Psi_o{}^{00}[\{x\}]=f(x) \cdot T[\{x\}]$; 2. $\Psi_o{}^{00}$ in jedem Punkt $x \in \bar{i}_0$ stetig ist (vgl. Def. F[0], 2.); 3. für eine mit $\Psi_o{}^{00}$ korrespondierende Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[i_0]$ (siehe I, § 1, Def.), bei $x \in i_0$, $x \in u \subseteqq i(x) \cdot i_0$, mit $i(x) \in \mathfrak{A}[i_0]$, immer

$$\Psi_o{}^{00}[u] \geqq f(x) \cdot T[u]$$

ist; dabei sei außerdem bei $T[u]=0$ auch $\Psi_o{}^{00}[u]=0$.

Die Definition G[00] einer zu f in i_0 adjungierten T^{00}-Minorante $\Psi_u{}^{00}$ (semi-additiv nach unten) wird evident sein.

Da sich in i_0 für je zwei Funktionen $\Psi_o{}^{00}$, $\Psi_u{}^{00}$ in direkter Weise leicht zeigen läßt, daß die für die Teilmengen $\in K_0$ nach oben semi-additive Differenz $\Psi_o{}^{00} - \Psi_u{}^{00}$ für diese Mengen $\geqq 0$ ist, liegt auch die zugehörige Definition H[00] des $(PS)^{00}$-Integrals von f über i_0, $\int_{i_0} (PS)^{00} f\, dT$, auf der Hand; dabei ist $\int_{\{x\}} (PS)^{00} f\, dT = f(x) \cdot T[\{x\}]$ bei $x \in i_0$.

Definition. Gibt es bei f endlichwertig in i_0 sowohl T^{00}-Majoranten wie T^{00}-Minoranten, so sei

$$\overline{\int}_{i_0} (PS)^{00} f\, dT = \text{untere Grenze aller } \Psi_o{}^{00}[i_0]$$

und

$$\underline{\int}_{i_0} (PS)^{00} f\, dT = \text{obere Grenze aller } \Psi_u{}^{00}[i_0].$$

Dann ist

$$\overline{\int}_{i_0} (PS)^{00} f\, dT \geqq \underline{\int}_{i_0} (PS)^{00} f\, dT.$$

Auch folgt aus der Existenz von $\int_{i_0} (PS)^{00} f\, dT$ die von $\int_i (PS)^{00} f\, dT$ für jedes Intervall $i \subset i_0$; daneben die Möglichkeit der eindeutigen Erweiterung des Integrals über die i und $\{x\}$ zu einer für die zu K gehörenden Teilmengen von i_0 beschränkt additiven Mengenfunktion.

Hilfssatz A^{00}. Jede in $i_0 \equiv i_0\,(a, b)$ beschränkte Funktion f hat ein oberes und ein unteres allgemeines Riemann-Integral in bezug auf T über i_0, $\overline{\int}_{i_0} f\, dT$ bzw. $\underline{\int}_{i_0} f\, dT$ (II, § 4, Def.); bei $\varepsilon > 0$ gibt es eine in i_0 zu f adjungierte T^{00}-Majorante $\Psi_o{}^{00}$ und eine in i_0 zu f adjungierte T^{00}-Minorante $\Psi_u{}^{00}$, mit

$$\overline{\int}_{i_0} f\, dT + \varepsilon > \Psi_o{}^{00}[i_0] \geqq \Psi_u{}^{00}[i_0] > \underline{\int}_{i_0} f\, dT - \varepsilon.$$

Beweis. Wie im Beweise von Hilfssatz A (Teil VII, § 47) läßt sich hier bei $\varepsilon > 0$ eine Riemann-Klasse $\mathfrak{A}'[i_0]$ angeben mit

$$\overline{\int}_{i_0} f\, dT + \varepsilon > F_{[o]}[f;\, \{\mathfrak{A}'[i_0], O;\, T\}] \geqq \overline{\int}_{i_0} f\, dT. \tag{163}$$

Für ein Teilintervall u von i_0 sei $\mathfrak{A}'[u]$ die aus $\mathfrak{A}'[i_0]$ durch Beschränkung auf die Punkte von $\bar{u}$ hervorgehende Riemann-Klasse; sie liefert einen endlichen Wert von $F_{[o]}[f;\, \{\mathfrak{A}'[u], O;\, T\}]$. Bei $u \equiv (p, q)$ lassen wir die den Punkten zwischen p und q zugeordneten Umgebungen ungeändert, während $i'(p)$ und $i'(q)$ $(\in \mathfrak{A}'[u])$ durch fortgesetzte Halbierungen auf beiden Seiten von p bzw. q in gegen p bzw. q konvergierende Umgebungen $i_n'(p)$, $i_n'(q)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ übergeführt werden sollen; dabei entstehen Riemann-Klassen $\mathfrak{A}_n'[u]$, mit nicht-zunehmenden Zahlenwerten

$$F_{[o]}[f;\, \{\mathfrak{A}'_n[u], O;\, T\}];$$

der endliche Grenzwert $(\geqq \overline{\int}_u f\, dT)$ sei

$$\Psi_o{}^{00}[u] (\leqq F_{[o]}[f;\, \{\mathfrak{A}'[u], O;\, T\}]). \tag{164}$$

Außerdem sei für jeden Punkt $x \in i_0$:

$$\Psi_o{}^{00}[\{x\}] = f(x) \cdot T[\{x\}].$$

Dann ist diese Funktion $\Psi_o{}^{00}$ in i_0 für die Teilmengen $\in K_0$ semi-additiv nach oben. Auch folgt bei $x \in i_0$, $x \in u \equiv (p, q) \subseteqq i'(x) \cdot i_0$, $i'(x) \in \mathfrak{A}'[i_0]$:

$$f(x) \cdot T[u] \leqq \lim_{n \to \infty} F_{[o]}[f;\, \{\mathfrak{A}'_n[u], O;\, T\}] = \Psi_o{}^{00}[u].$$

$\Psi_o{}^{00}$ genügt, bei der hier betrachteten Funktion f, allen Bedingungen der Definition F^{00} (mit $\mathfrak{A}'[i_0]$ als korrespondierende Riemann-Klasse).

Mit (163) und (164) folgt die erste Hälfte.

Analog beweist man den zweiten Teil.

Folgerung. Bei f beschränkt in i_0 gilt allgemein für obere und untere allgemeine R- und $(PS)^{00}$-Integrale:

$$\overline{\int}_{i_0} f\, dT \geqq \overline{\int}_{i_0} (PS)^{00} f\, dT \geqq \underline{\int}_{i_0} (PS)^{00} f\, dT \geqq \underline{\int}_{i_0} f\, dT.$$

Hilfssatz B^{00}. Aus der Existenz der oberen und unteren $(PS)^{00}$-Integrale in bezug auf T einer in i_0 beschränkten Funktion f folgt, bei $\varepsilon > 0$, die Existenz einer Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[i_0]$ und einer (übrigens willkürlich zu wählenden) Menge E_0 von endlich vielen Trennungspunkten (in bezug auf T), für die

$$\overline{\int}_{i_0} (PS)^{00} f\, dT + \varepsilon > F_{[o]}[f;\, \{\mathfrak{A}[i_0],\, E_0;\, T\}].\text{[112]} \tag{165}$$

Analog gibt es eine Riemann-Klasse $\mathfrak{A}'[i_0]$ und eine Menge E'_0 von endlich vielen Trennungspunkten mit

$$\underline{\int}_{i_0} (PS)^{00} f\, dT - \varepsilon > F_{[u]}[f;\, \{\mathfrak{A}'[i_0],\, E_0';\, T\}].\text{[112]} \tag{166}$$

Beweis. Aus der letzten Definition und Definition F^{00} folgt bei $\varepsilon > 0$ die Existenz einer in i_0 zu f adjungierten T^{00}-Majorante $\Psi_o{}^{00}$ mit

$$\overline{\int}_{i_0} (PS)^{00} f\, dT + \varepsilon > \Psi_o{}^{00}[i_0]. \tag{167}$$

Für die zu $\Psi_o{}^{00}$ gehörende Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[i_0]$ und der Menge E_0 (wie im Hilfssatz B^{00} angegeben) ist dann wegen der Bedingung 3. und der Semi-Additivitätsannahme in Definition F^{00}:

$$\Psi_o{}^{00}[i_0] \geqq F_{[o]}[f;\, \{\mathfrak{A}[i_0],\, E_0;\, T\}]. \tag{168}$$

Aus (167) und (168) folgt (165).
Analog folgt (166).

Folgerung. Für eine in i_0 beschränkte Funktion f ist

$$\overline{\int}_{i_0} (PS)^{00} f\, dT \geqq \overline{\int}_{i_0} f\, dT \geqq \underline{\int}_{i_0} f\, dT \geqq \underline{\int}_{i_0} (PS)^{00} f\, dT.$$

Die Folgerungen der Hilfssätze A^{00} und B^{00} liefern unmittelbar:

Theorem 60. Bei jeder in i_0 beschränkten Funktion f ist

$$\overline{\int}_{i_0} (PS)^{00} f\, dT = \overline{\int}_{i_0} f\, dT \quad \text{und} \quad \underline{\int}_{i_0} (PS)^{00} f\, dT = \underline{\int}_{i_0} f\, dT,$$

woraus *die Aequivalenz der allgemeinen R-Integration und der $(PS)^{00}$-Integration in bezug auf T für die Mengen des Körpers K bei in i_0 beschränkten Funktionen* hervorgeht.

§ 50. Satz. Aus g beschränkt in i_0, $\int_H (PS)^{00} g\, dT = 0$ für jede Menge $H \subseteqq i_0$, $\in K_0$ folgt $m_T[E(g \neq 0)] = 0 = \mu_T[E(g \neq 0)]$.[127]

---

[127]) m_T und μ_T sind bzw. LS-Maß i.b.a. T und allgemeines T-Maß. Aus $A \subseteqq i_0$ und der Existenz von $m_T(A)$ folgt daß auch $\mu_T(A)$ existiert, gleich $m_T(A)$ (siehe Teil II, § 4, Korollar).

Beweis. Für jedes $\eta > 0$ läßt sich zeigen daß die Teilmenge $E[g > \eta]$ von i_0 ein äußeres LS-Maß m_T gleich Null hat. Betrachten wir, im entgegengesetzten Fall, eine T^{00}-Majorante $\Psi_o{}^{00}$ von g in i_0, mit zugehöriger Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[i_0]$; dann ist $\Psi_o{}^{00}(H) \geqq 0$ für jede Menge $H \subseteqq i_0, \in K_0$.

Zu jedem Punkte $x \in E[g > \eta]$ gibt es eine Umgebung $i(x) \in \mathfrak{A}[i_0]$, somit auch eine Folge von Umgebungen $u_n(x) \subset i(x) \cdot i_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, welche sich mit zunehmendem n in x zusammenziehen. Nach einem Überdeckungssatz im Vitalischen Sinne [128]) gibt es endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_k, \in E[g > \eta]$, mit zugehörigen Umgebungen $u_{n(1)}(x_1), \ldots, u_{n(k)}(x_k)$ aus den zugehörigen Folgen und paarweise ohne gemeinsame innere- oder Randpunkte, so daß

$$\sum_{j=1}^{k} m_T[u_{n(j)}(x_j)] \geqq m_{a,T}[E[g > \eta] \cdot (u_{n(1)}(x_1) + \ldots + u_{n(k)}(x_k))] > \tfrac{1}{2} m_{a,T}\, [E[g > \eta]];$$

mit Bedingung 3. der Definition F^{00}, $\Psi_o{}^{00} \geqq 0$ für jede Menge $H \in K_0$ und der Semi-Additivität nach oben von $\Psi_o{}^{00}$ folgt dadurch

$$\Psi_o{}^{00}[i_0] > \eta \cdot \tfrac{1}{2} m_{a,T}[E[g > \eta]] > 0.$$

Wegen $\int_{i_0} (PS)^{00}\, g\, dT = 0$ läßt sich $\Psi_o{}^{00}$ so wählen, daß ein Widerspruch entsteht.

Also muß (in i_0) $m_T[E[g > 0]] = 0$ sein.

Ebenso ist $m_T[E[g < 0]] = 0$.

§ 51. Theorem 61. *Jede in i_0 beschränkte Funktion f, welche über i_0 ein allgemeines R-Integral i.b.a. T hat, ist in i_0 auch LS-meßbar i.b.a. m_T.*

Beweis. Für jede Menge $H \subseteqq i_0$ und $\in K$ ist, nach Theorem 60,

$$\Psi(H) \equiv \int_H (PS)^{00} f\, dT = \int_H f\, dT, \tag{169}$$

wobei $\int_H f\, dT$ das allgemeine R-Integral.

Mit den Definitionen F^{00}, G^{00}, H^{00} folgt, daß das $(PS)^{00}$-Integral eine für die zu K gehörenden Teilmengen H von i_0 in bezug auf m_T totalstetige, additive Mengenfunktion ist (es folgt auch mit der Definition des allgemeinen R-Integrals). Sie hat dadurch in den Punkten von $i_0 - A$, wobei $A \subset i_0$ mit $m_T(A) = 0$, eine Ableitung in bezug auf T, $D_{T;x}\Psi$,[129]) welche ein LS-Integral in bezug auf m_T über jedes H hat mit

(170) $\Psi(H) = \int_H (LS)\, D_{T;x}\Psi dm_T$,[130]) somit auch $= \int_H D_{T;x}\Psi dT$.[131])

---

[128]) Siehe J. Ridder, *Über PS- und DS-Integration*, Math. Ztschr. **40** (1935), S. 127–160, insbes. S. 129 (Satz I).

[129]) Siehe die Definition in Teil II^{bis}, § 10.

[130]) Für den Beweis dieser Behauptungen wende man die Verfahren loc. cit. 128), S. 128–136 (erstes Kapitel) an.

[131]) Siehe Teil II^{bis}, § 12 (Spezialfall von Theorem 19) in diesen Proceed. Series **A 68** (1965), S. 37.

Für jedes H folgt aus (169) und (170):

$$0 = \int_H [f - D_{T;x}\Psi]\, dT = \int_H (PS)^{00}[f - D_{T;x}\Psi]\, dT.$$

Wegen (170) ist $D_{T;x}\Psi$ LS-meßbar in bezug auf m_T, während nach dem Satze von § 50 $m_T[E(f - D_{T;x}\Psi \neq 0)] = 0$ ist. Somit ist auch f über i_0 LS-meßbar in bezug auf m_T.

Korollar. Jede Teilmenge H von i_0, welche ein Maß μ_T hat, ist auch LS-meßbar in bezug auf m_T und umgekehrt, mit $m_T(H) = \mu_T(H)$.

Dies folgt durch Anwendung von Theorem 61 auf die charakteristische Funktion c_H von H, zusammen mit II, § 4 (letztes Korollar).

Mit II, §4bis folgt weiter, *daß in R_1 die Klassen der allgemein Φ-meßbaren Mengen und der Mengen mit LS-Maß m_Φ zusammenfallen, wobei die Maßzahlen einander gleich sind.*

Die Übertragung auf R_n mit $n > 1$ führen wir im folgenden für R_2 aus.

Aequivalenz der $m_\Phi[m_T]$ und $\mu_\Phi[\mu_T]$ in R_2.

§ 52. Definition. Eine in $i_0 \equiv i_0\,(a, b; c, d)$ für die Teilmengen $\in K_0$ definierte endlichwertige Mengenfunktion Ψ ist in i_0 *semi-additiv nach oben* [*nach unten*], falls aus $i_0' \equiv i_0'\,(r', s'; t, u)$, $i_0'' \equiv i_0''\,(s', s''; t, u) \subset i_0$ folgt:

$$\Psi[\{i_0' + i_1(s'; t, u) + i_0''\}] \geqq [\leqq]\ \Psi[i_0'] + \Psi[i_1(s'; t, u)] + \Psi[i_0''],$$

daneben aus $i_0''' \equiv i_0'''\,(r, s; t', u')$, $i_0'''' \equiv i_0''''\,(r, s; u', u'') \subset i_0$ folgt:

$$\Psi[\{i_0''' + i_2(r, s; u') + i_0''''\}] \geqq [\leqq] \Psi[i_0'''] + \Psi[i_2(r, s; u')] + \Psi[i_0''''].$$

Definition $\mathfrak{F}^{00}$. In $i_0 \equiv i_0\ (a, b; c, d)$ ist eine für die Teilmengen $\in K_0$ nach oben semi-additive Mengenfunktion Ψ_o^{00} *eine zu der in i_0 nicht negativen, beschränkten Punktfunktion f adjungierte T^{00}-Majorante*, wenn: 1. für jeden Punkt $(x, y) \in i_0$ gilt $\Psi_o^{00}[\{(x, y)\}] = f(x, y) \cdot T[\{(x, y)\}]$; für die linearen Teilintervalle $i_1(\xi; y_1, y_2)$ und $i_2(x_1, x_2; \eta)$ von i_0, parallel zur y- bzw. x-Achse, die Werte von Ψ_o^{00} zusammenfallen mit denen der als existierend anzunehmenden $(PS)^{00}$-Integrale von $f(\xi, y)$ bzw. $f(x, \eta)$ in bezug auf T, $\int_{i_1} (PS)^{00} f\,(\xi, y)\, dT$ bzw. $\int_{i_2} (PS)^{00} f\,(x, \eta)\, dT$;[132] 2. Ψ_o^{00} stetig ist in $\bar{i}_0$, was heißen soll: aus $a \leqq \xi_1 < \xi_2 \leqq b$; $c \leqq \eta_1 < \eta_2 \leqq d$ folgt immer $\lim\limits_{\xi_1 \to \xi_2} \Psi_o^{00}[(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2)] = \lim\limits_{\xi_2 \to \xi_1} \Psi_o^{00}[(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2)] = \lim\limits_{\eta_1 \to \eta_2} \Psi_o^{00}[(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2)] = \lim\limits_{\eta_2 \to \eta_1} \Psi_o^{00}[(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2)] = 0$; 3. für eine mit Ψ_o^{00} korrespondierende Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[i_0]$ (siehe IV § 20, Def.), bei $(x, y) \in i_0$, $(x, y) \in u \subseteqq i\ [\{(x, y)\}] \cdot i_0$, mit $i[\{(x, y)\}] \in \mathfrak{A}[i_0]$, immer

$$\Psi_o^{00}[u] \geqq f(x, y) \cdot T[u]$$

ist; dabei sei außerdem bei $T[u] = 0$ auch $\Psi_o^{00}[u] = 0$.

---

[132]) Gebildet gemäß § 49.

Die Definition $\mathfrak{G}^{00}$ *einer zu f in i_0 adjungierten T^{00}-Minorante* Ψ_u^{00} (semi-additiv nach oben) wird evident sein.

Die für die Teilmengen $\in K_0$ nach oben semi-additive Differenz $\Psi_o^{00}-\Psi_u^{00}$ einer T^{00}-Majorante und einer T^{00}-Minorante ist nichtnegativ [133]) für diese Mengen. Dadurch liegt die zugehörige Definition $\mathfrak{H}^{00}$ *des $(PS)^{00}$-Integrals von f über i_0*, $\int_{i_0}(PS)^{00}f\,dT$, auf der Hand; dabei ist $\int_{\{(x,y)\}}(PS)^{00}f\,dT=f(x,y)\cdot T[\{(x,y)\}]$ bei $(x,y)\in i_0$, und sind die Integrale über lineare Intervalle wie in Def. $\mathfrak{F}^{00}$, 1. zu nehmen.

Definition. Gibt es bei $f\geqq 0$ und beschränkt in i_0 sowohl T^{00}-Majoranten wie T^{00}-Minoranten, so sei

$$\overline{\int}_{i_0}(PS)^{00}f\,dT=\text{untere Grenze aller } \Psi_o^{00}[i_0]$$

und

$$\underline{\int}_{i_0}(PS)^{00}f\,dT=\text{obere Grenze aller } \Psi_u^{00}[i_0].$$

Dann ist

$$\overline{\int}_{i_0}(PS)^{00}f\,dT\geqq\underline{\int}_{i_0}(PS)^{00}f\,dT.$$

Auch folgt aus der Existenz von $\int_{i_0}(PS)^{00}f\,dT$ die von $\int_{i}(PS)^{00}f\,dT$ für jedes zwei-dim. Intervall $i\subset i_0$; daneben die Möglichkeit der eindeutigen Erweiterung des Integrals über die zu K_0 gehörenden Teilmengen von i_0 zu einer für die zu K gehörenden Teilmengen beschränkt additiven Mengenfunktion.

Hilfssatz $\mathfrak{A}^{00}$. Jede in $i_0\equiv i_0(a,b;c,d)$ nicht-negative beschränkte Funktion f hat ein oberes und ein unteres allgemeines Riemann-Integral in bezug auf T über i_0, $\overline{\int}_{i_0}f\,dT$ bzw. $\underline{\int}_{i_0}f\,dT$ (V^a, § 31, Def.[134])). Für eine derartige Funktion, welche außerdem auf jedem in i_0 liegenden linearen Intervalle $i_1(\xi;p,q)$ oder $i_2(r,s;\eta)$ ein allgemeines R-Integral $\int_{i_1}f(\xi,y)\,dT$ bzw. $\int_{i_2}f(x,\eta)\,dT$ hat, gibt es bei $\varepsilon>0$ eine in i_0 zu f adjungierte T^{00}-Majorante Ψ_o^{00} und eine in i_0 zu f adjungierte T^{00}-Minorante Ψ_u^{00}, mit

$$\overline{\int}_{i_0}f\,dT+\varepsilon>\Psi_o^{00}[i_0]\geqq\Psi_u^{00}[i_0]>\underline{\int}_{i_0}f\,dT-\varepsilon.$$

Beweis. Mit V^a, § 31 [134]) folgt, bei $\varepsilon>0$, und $f\geqq 0$ und beschränkt in i_0, die Existenz einer Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[i_0]$ und einer Menge E_0 von endlich vielen Trennungslinien (i.b.a. T) zu i_0, für die

$$\overline{\int}_{i_0}f\,dT+\varepsilon>F_{[o]}[f;\{\mathfrak{A}[i_0],E_0;T\}]\geqq\overline{\int}_{i_0}f\,dT.$$

Ist die Menge E_0 von Trennungslinien gegeben durch $x=x_j$, mit $a=x_0<$

---

133) Es genügt den Beweis für jedes zwei-dim. Teilintervall von i_0 zu geben. Ist $i(\xi_1,\xi_2;\eta_1,\eta_2)$ ein solches Intervall mit $a\leqq\xi_1<\xi_2\leqq b$; $c\leqq\eta_1<\eta_2\leqq d$, so zeigt man erstens daß zu jedem X mit $\xi_1<X<\xi_2$ ein Streifen $i(X-h_1(X),X+h_2(X);\eta_1,\eta_2)$ gehört mit $(\Psi_o^{00}-\Psi_u^{00})[i(X-h_1'(X),X+h_2'(X);\eta_1,\eta_2)]\geqq 0$ für $0<h_1'(X)\leqq h_1(X)$), $0<h_2'(X)\leqq h_2(X)$. Daraus folgt dann, mit der Semi-Additivität und Stetigkeit von $\Psi_o^{00}-\Psi_u^{00}$, $(\Psi_o^{00}-\Psi_u^{00})[i(\xi_1,\xi_2;\eta_1,\eta_2)]\geqq 0$.

134) Siehe diese Proceed. Series **A 68** (1965), S. 710.

$<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$, und $y=y_k$, mit $c=y_0<y_1<\ldots<y_{m-1}<y_m=d$, so gibt es eine Riemann-Klasse $\mathfrak{A}'[i_0]\subseteqq\mathfrak{A}[i_0]$, mit nachfolgenden Eigenschaften: 1° aus $x_j<\xi<x_{j+1}$ $(j=0, 1, \ldots, n-1)$, $y_k<\eta<y_{k+1}$ $(k=0, \ldots, m-1)$ folgt, bei $i'((\xi, \eta))\in\mathfrak{A}'[i_0]$, $i((\xi, \eta))\in\mathfrak{A}[i_0]$, daß:

$$i'((\xi, \eta))\subseteqq i((\xi, \eta))\cdot(x_j, x_{j+1}; y_k, y_{k+1});$$

2° wenn die den Punkten eines Segmentes $[x=x_j; c\leqq y\leqq d]$ durch $\mathfrak{A}'[i_0]$ zugeordneten Umgebungen $i'(x_j, y)$ sämtlich eine Menge H_j bilden $(j=0, \ldots, n)$, ist $\bar{H}_{j_1}\cdot\bar{H}_{j_2}=0$ $(j_1\neq j_2)$; wenn die den Punkten eines Segmentes $[a\leqq x\leqq b; y=y_k]$ durch $\mathfrak{A}'[i_0]$ zugeordneten Umgebungen $i'(x, y_k)$ sämtlich eine Menge G_k bilden $(k=0, \ldots, m)$, ist $\bar{G}_{k_1}\cdot\bar{G}_{k_2}=0$ $(k_1\neq k_2)$. Ersetzt man außerdem E_0 durch die leere Menge O, so folgt mit der Definition von $F_{[o]}$:

$$F_{[o]}[f; \{\mathfrak{A}[i_0], E_0; T\}]\geqq F_{[o]}[f; \{\mathfrak{A}'[i_0], O; T\}],$$

also auch:

$$\text{(171)} \qquad \bar{\int}_{i_0} f\, dT+\varepsilon>F_{[o]}[f; \{\mathfrak{A}'[i_0], O; T\}]\geqq\bar{\int}_{i_0} f\, dT.$$

Für ein Teilintervall u von i_0 sei $\mathfrak{A}'[u]$ die aus $\mathfrak{A}'[i_0]$ durch Beschränkung auf die Punkte von $\bar{u}$ hervorgehende Riemann-Klasse; sie liefert einen endlichen Wert von $F_{[o]}[f; \{\mathfrak{A}'[u], O; T\}]$. Nun ändern wir $\mathfrak{A}'[u]$ ab: 1° für die Punkte $(x, y)\in u$ bleibe $i'[(x, y)]$ wie in $\mathfrak{A}'[u]$, 2° bei einem Punkte $(x, y)\in\bar{u}-u$ schränken wir $i'[(x, y)]\equiv(x-\delta_1, x+\delta_2; y-\delta_3, y+\delta_4)$ $(\delta_j\equiv\delta_j(x, y))$ durch fortgesetzte Halbierungen der δ_j $(j=1, \ldots, 4)$ ein, wodurch nach n-facher Halbierung eine Umgebung

$$i_n'[(x, y)]\equiv\left(x-\frac{1}{2^n}\delta_1, x+\frac{1}{2^n}\delta_2; y-\frac{1}{2^n}\delta_3, y+\frac{1}{2^n}\delta_4\right)$$

entsteht. Für die so gebildeten Riemann-Klassen $\mathfrak{A}_n'[u]$ $(n=1, 2, \ldots)$ bilden die Werte

$$\text{(172)} \qquad F_{[o]}[f; \{\mathfrak{A}'_n[u], O; T\}]$$

eine nicht-zunehmende Folge; der endliche Grenzwert $(\geqq\bar{\int}_u f\, dT)$ sei

$$\text{(173)} \qquad \Psi_o^{00}[u](\leqq F_{[o]}[f; \{\mathfrak{A}'[u], O; T\}]).$$

Existieren für die betrachtete Funktion f außerdem in i_0 die allgemeinen R-Integrale $\int_{i_1} f(\xi, y)\, dT$ und $\int_{i_2} f(x, \eta)\, dT$, wie im Hilfssatz $\mathfrak{A}^{00}$ angegeben, so läßt sich weiter definieren: 1° für die linearen Teilintervalle von i_0:

$$\Psi_o^{00}[i_1(\xi; y_1, y_2)]=\int_{i_1} f(\xi, y)\, dT;\ \Psi_o^{00}[i_2(x_1, x_2; \eta)]=\int_{i_2} f(x, \eta)\, dT,$$

2° für einzelne Punkte $(x, y)\in i_0$:

$$\Psi_o^{00}[\{(x, y)\}]=f(x, y)\cdot T[\{(x, y)\}].$$

Mit Theorem 60 folgt, daß diese Funktion Ψ_o^{00} Bedingung 1 der Definition $\mathfrak{F}^{00}$ erfüllt; aus der Beschränktheit von f folgt dasselbe für Bedingung 2 von Definition $\mathfrak{F}^{00}$; mit $\mathrm{V^a}$, § 31, Def. und § 32^{bis}, und der Definition von $\Psi_o^{00}[u]$ als Grenzwert der Werte (172) folgt auch die Semi-Additivität nach oben von Ψ_o^{00}.

Bei $(x, y) \in i_0$, $(x, y) \in u \subseteqq i'[(x, y)] \cdot i_0$, $i'[(x, y)] \in \mathfrak{A}'[i_0]$ ist

$$f(x, y) \cdot T[u] \leqq \lim_{n \to \infty} F_{[o]}[f; \{\mathfrak{A}'_n[u], O; T\}] = \Psi_o^{00}[u].$$

Ψ_o^{00} genügt nun, bei der hier betrachteten Funktion f, allen Bedingungen der Definition $\mathfrak{F}^{00}$ (mit $\mathfrak{A}'[i_0]$ als korrespondierende Riemann-Klasse).

Mit (171) und (173) folgt die erste Hälfte.

Ebenso beweist man den zweiten Teil.

Folgerung. Bei f nicht-negativ und beschränkt in i_0, mit in i_0 existierenden allgemeinen R-Integralen $\int_{i_1} f(\xi, y)\, dT$, $\int_{i_2} f(x, \eta)\, dT$, gilt allgemein für obere und untere allgemeine R- und $(PS)^{00}$-Integrale:

$$\overline{\int}_{i_0} f\, dT \geqq \overline{\int}_{i_0} (PS)^{00} f\, dT \geqq \underline{\int}_{i_0} (PS)^{00} f\, dT \geqq \underline{\int}_{i_0} f\, dT.$$

Hilfssatz $\mathfrak{B}^{00}$. Gibt es obere und untere $(PS)^{00}$-Integrale in bezug auf T einer in i_0 nicht-negativen und beschränkten Funktion f, so folgt, bei $\varepsilon > 0$, die Existenz einer Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[i_0]$ und einer (übrigens willkürlich zu wählenden) Menge E_0 von endlich vielen Trennungslinien (in bezug auf T), für die

(174) $$\overline{\int}_{i_0} (PS)^{00} f\, dT + \varepsilon > F_{[o]}[f; \{\mathfrak{A}[i_0], E_0; T\}].$$

Analog gibt es dann eine Riemann-Klasse $\mathfrak{A}'[i_0]$ und eine Menge E_0' von endlich vielen Trennungslinien mit

(175) $$\underline{\int}_{i_0} (PS)^{00} f\, dT - \varepsilon < F_{[u]}[f; \{\mathfrak{A}'[i_0], E_0'; T\}].$$

Beweis. Aus der letzten Definition dieses Par. und Definition $\mathfrak{F}^{00}$ folgt bei $\varepsilon > 0$ die Existenz einer in i_0 zu f adjungierten T^{00}-Majorante Ψ_o^{00} mit

(176) $$\overline{\int}_{i_0} (PS)^{00} f\, dT + \varepsilon > \Psi_o^{00}[i_0].$$

Für die zu Ψ_o^{00} gehörende Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[i_0]$ und die Menge E_0 (wie im Hilfssatz $\mathfrak{B}^{00}$ angegeben) ist dann wegen der Bedingung 3. und der Semi-Additivitätsannahme in Definition $\mathfrak{F}^{00}$:

(177) $$\Psi_o^{00}[i_0] \geqq F_{[o]}[f; \{\mathfrak{A}[i_0], E_0; T\}].$$

Aus (176) und (177) folgt (174).

Analog folgt (175).

Folgerung. Für eine in i_0 nicht-negative beschränkte Funktion f folgt aus der Existenz der oberen und unteren $(PS)^{00}$-Integrale i.b.a. T über i_0:

$$\overline{\int}_{i_0} (PS)^{00} f\, dT \geqq \overline{\int}_{i_0} f\, dT \geqq \underline{\int}_{i_0} f\, dT \geqq \underline{\int}_{i_0} (PS)^{00} f\, dT.$$

Die Folgerungen der Hilfssätze $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zusammen mit V^a, § 32^{bis}, u. § 33 (Theorem 43^b), und Theorem 60 liefern sofort:

Theorem 62. *Für die Klasse der in i_0 nicht-negativen beschränkten Funktionen sind die allgemeine R-Integration i.b.a. T und die $(PS)^{00}$-Integration i.b.a. T für die Mengen des Körpers K aequivalent.*

§ 53. Satz. Aus g nicht-negativ und beschränkt in i_0, mit

$$\int_H (PS)^{00}\, g\, dT = 0$$

für jede Menge $H \subseteqq i_0$, $\in K_0$, folgt in i_0 $m_T[E(g \neq 0)] = 0 = \mu_T[E(g \neq 0)]$.[135]

Beweis. Für jedes $\eta > 0$ läßt sich zeigen daß die Teilmenge $E[g > \eta]$ von i_0 ein äußeres LS-Maß m_T gleich Null hat. Betrachten wir, im entgegengesetzten Fall, eine T^{00}-Majorante $\Psi_o{}^{00}$ von g in i_0, mit zugehöriger Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[i_0]$; dann ist $\Psi_o{}^{00}(H) \geqq 0$ für jede Menge $H \subseteqq i_0$, $\in K_0$.

Zu jedem Punkte $(x, y) \in E[g > \eta]$ gibt es eine Umgebung $i[(x, y)] \in \mathfrak{A}[i_0]$, somit auch eine Folge von Umgebungen $u_n[(x, y)] \subset i[(x, y)] \cdot i_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, welche sich mit zunehmendem n in (x, y) zusammenziehen, und deren abgeschlossene Hüllen den Bedingungen eines Lemmas 1 unserer Arbeit in Nieuw Archief, Amsterdam (2) **21** (erstes Stück 1941), S. 33–58, insbes. S. 34, erfüllen; es ist dabei erlaubt anzunehmen daß jede solche Umgebung und ihre ebgeschlossene Hülle dasselbe m_T-Maß haben. Aus diesem Lemma (ein Überdeckungssatz im Vitalischen Sinne) folgt die Existenz endlich vieler Punkte $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$, $\in E[g > \eta]$, mit zugehörigen Umgebungen $u_{n(1)}(x_1, y_1), \ldots, u_{n(k)}(x_k, y_k)$ aus den zugehörigen Folgen und paarweise ohne gemeinsame innere- oder Randpunkte, so daß

$$\sum_{=1}^{k} m_T[u_{n(j)}(x_j, y_j)] \geqq m_{a,T}[E(g > \eta) \cdot \\ \cdot (u_{n(1)}(x_1, y_1) + \ldots + u_{n(k)}(x_k, y_k)] > \tfrac{1}{2} m_{a,T}[E(g > \eta)];$$

mit der Bedingung 3. der Definition $\mathfrak{F}^{00}$, $\Psi_o{}^{00} \geqq 0$ für jede Menge $H \in K_0$ und der Semi-Additivität nach oben von $\Psi_o{}^{00}$ folgt dadurch

$$\Psi_o{}^{00}[i_0] > \eta \cdot \tfrac{1}{2} m_{a,T}[E(g > \eta)] > 0.$$

Wegen $\int_{i_0} (PS)^{00}\, g\, dT = 0$ läßt sich $\Psi_o{}^{00}$ so wählen, daß ein Widerspruch entsteht.

Also muß (in i_0) $m_T[E(g > 0)]$ oder $m_T[E(g \neq 0)] = 0$ sein.

§ 54. Theorem 63. *Jede in i_0 nicht-negative beschränkte Funktion f, welche über i_0 ein allgemeines R-Integral i.b.a. T hat, ist in i_0 auch m_T-meßbar.*

---

[135]) m_T und μ_T haben dieselbe Relation in R_2 wie in Fußn. 127 für R_1 angegeben. Siehe auch Teil V^b, § 35 (Anfang).

Beweis. Für jede Menge $H \subseteqq i_0$ und $\in K$ ist, nach Theorem 62.

$$\Psi(H) \equiv \int_H (PS)^{00} f\, dT = \int_H f\, dT, \tag{178}$$

wobei $\int_H f\, dT$ das allgemeine R-Integral.

Mit den Definitionen $\mathfrak{F}^{00}$, $\mathfrak{G}^{00}$, $\mathfrak{H}^{00}$ (oder der Definition des allgemeinen R-Integrals) folgt, daß Ψ eine für die zu K gehörenden Teilmengen H von i_0 in bezug auf m_T totalstetige, additive Mengenfunktion ist, welche sich zu einer für die nach Borel meßbaren Teilmengen von i_0 totaladditiven, in bezug auf m_T totalstetigen Mengenfunktion erweitern läßt. Dadurch läßt sich aus der in § 53 zitierten Arbeit der Spezialfall des Theorems III (loc. cit. S. 38 bzw. 37) anwenden, woraus folgt daß Ψ in den Punkten von $i_0 - A$, wobei $A \subset i_0$ mit $m_T(A) = 0$, eine Ableitung in bezug auf T, gemäß loc. cit. S. 35, 36 (Def. 2) und hier anzudeuten durch $D_{T;(x,y)}\Psi$, hat, mit

$$\Psi(H) = \int_H (LS)\, D_{T;(x,y)}\Psi \cdot dm_T, \text{ somit auch} = \int_H D_{T;(x,y)}\Psi \cdot dT \tag{179}$$ [136])

für jedes $H \subseteqq i_0$, $\in K$.

Für jedes solche H folgt aus (178) und (179):

$$0 = \int_H [f - D_{T;(x,y)}\Psi]\, dT = \int_H (PS)^{00} [f - D_{T;(x,y)}\Psi]\, dT.$$

Wegen (179) ist $D_{T;(x,y)}\Psi$ LS-meßbar i.b.a. m_T, während nach dem Satz von § 53 $m_T[E(f - D_{T;(x,y)}\Psi \neq 0)] = 0$ ist. Somit ist auch f über i_0 LS-meßbar i.b.a. m_T.

Korollar. Jede Teilmenge H von i_0, welche ein Maß μ_T hat, ist auch LS-meßbar für das Maß m_T und umgekehrt, wobei dann $m_T(H) = \mu_T(H)$.

Dies folgt durch Anwendung von Theorem 63 auf die charakteristische Funktion c_H von H, zusammen mit V^b, § 35, Anfang.

Mit V^b, § 35^bis folgt weiter, *daß in R_2 die Klassen der allgemein Φ-meßbaren Mengen und der Mengen mit LS-Maß m_Φ zusammenfallen, wobei die Maßzahlen einander gleich sind.*

---

[136]) Siehe Teil V^c, § 41 (Spezialfall von Theorem 57) in diesen Proceed. Series **A 68** (1965), S. 744.